Title	Vortex Solution in Fractional Quantum Hall Effect
Author(s)	石川, 健三; 前田, 展希
Citation	物性研究 (1994), 61(6): 618-626
Issue Date	1994-03-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/95279
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Vortex Solution in Fractional Quantum Hall Effect

北海道大学理学部物理　石川　健三　and　前田　展希

1. Introduction

一様な磁場中のクーロン相互作用する二次元電子系に対して平均場理論を適用する。但しスピンや不純物の効果は考慮しない。通常の平均場理論では bosonic field operator の期待値 $\langle\phi(x)\rangle$ を平均場として用いるが、elementary field が今の場合 fermionic であるため一体の operator $\psi(x)$ は期待値0である。そこで我々は二体の bi-local operator の期待値 $\langle\psi^\dagger(y)\psi(x)\rangle$ を平均場とする平均場理論を構成し、分数量子ホール状態にある二次元電子系に適用し電子密度が空間的に一様な self-consistent な平均場解を得た[1]。以下では、空間的に一様な状態からの励起状態として回転不変な平均場解（Vortex 解）について議論する[2]。これは超伝導理論や Abelian Higgs 理論における Abrikosov-Nielsen-Olesen Vortex[3] と類似のトポロジカルな励起である。三次元空間では Vortex 的な励起は一次元的な広がりを持つが、二次元空間では点状の励起であり準粒子として振舞う。さらに、二次元空間の特殊性として準粒子は同種粒子の交換に対して任意の位相因子をとることができる（Anyon）。分数量子ホール状態において実験的に測定されている Activation Energy はこの準粒子と反準粒子の対生成のエネルギーであると考えられる[4]。我々は以下で $\nu = 1/3$ の場合に数値的に self-consistent な Vortex 解を求め、その形状や電荷、角運動量を計算する。さらに Vortex anti-Vortex pair の生成エネルギーの磁場依存性を計算する。

2. Mean Field and Vortex Solution

一様な磁場 B が垂直に作用するクーロン相互作用する非相対論的二次元電子系のハミルトニアンは

$$H = \int d^2x\psi^\dagger(x)\frac{(\mathbf{P}+e\mathbf{A})^2}{2m}\psi(x) + \frac{1}{2}\int d^2xd^2y\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)V(x-y)\psi(y)\psi(x)。 \tag{1}$$

ここで、$P_i = -i\frac{\partial}{\partial x^i}, \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B,\ V(x-y) = \frac{e^2}{|x-y|}$。この系の分配関数は汎関数

積分形式で

$$Z = Tr(e^{-\beta H}) = \int D\psi^\dagger D\psi e^{-\int_0^\beta d\tau[\int d^2x\psi^\dagger\partial_\tau\psi + H]}。 \tag{2}$$

ここで補助場 $U(x,y)$ を導入し Z を書き換えると

$$Z = \int DUD\psi^\dagger D\psi e^{-\int_0^\beta d\tau[\int d^2x\psi^\dagger\partial_\tau\psi + H^U]}, \tag{3}$$

$$H^U = \int d^2x\psi^\dagger(x)\frac{(\mathbf{P}+e\mathbf{A})^2}{2m}\psi(x) + \frac{1}{2}\int d^2xd^2yV(x-y)[|U(x,y)|^2 - U(x,y)\psi^\dagger(x)\psi(y) - U^*(x,y)\psi^\dagger(y)\psi(x)]。 \tag{4}$$

以下では $\beta \to \infty$ とし、絶対零度を考える。平均場は有効作用 $S_{\mathrm{eff}}(U)$ の停留点として定義される。すなわち、

$$Z = \int DUe^{-S_{\mathrm{eff}}(U)},$$

$$\left.\frac{\partial S_{\mathrm{eff}}}{\partial U}\right|_{U=U_0} = 0, \quad U_0(x,y) = \left\langle\psi^\dagger(y)\psi(x)\right\rangle_{U=U_0}。 \tag{5}$$

平均場 U_0 に次のような ansatz を仮定する。

$$U_0(x,y) = \frac{\nu}{\pi R_0^2}\rho(x,y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2R_0^2}}\exp[i\int_x^y \alpha_i d\xi^i], \tag{6}$$

ここで $R_0 = \sqrt{2/eB}$, $\lim_{x\to\infty, y\neq 0}\rho(x,y) = 1$。これらのパラメータは無限遠方で密度一定 (filling factor=ν) の self-consistent な解に一致するように決めた。線積分の経路は x と y を結ぶ直線である。ρ と α は未定関数で後で self-consistency condition から計算される。

密度一定の self-consistent な解は[1]

$$U_0^{(g.s.)}(x,y)=\frac{\nu}{\pi R_0^2}e^{-\frac{(x-y)^2}{2R_0^2}}\exp[i\int_x^y eA_i d\xi^i]。\tag{7}$$

Eq.(6) を Eq.(4) に代入して平均場ハミルトニアン H^{U_0} は

$$\begin{aligned}H^{U_0}&=\int d^2x\lim_{\bar{x}\to x}\psi^\dagger(x)[\frac{(\mathbf{P}+e\mathbf{A})^2}{2m}-F((\mathbf{P}+\boldsymbol{\alpha})^2)\rho(\bar{x},x)]\psi(x)\\&\quad+\frac{1}{2}\int d^2xd^2yV(x-y)|U_0(x,y)|^2,\\F(p^2)&=\sqrt{2\pi}\frac{\nu e^2}{R_0}e^{-R_0^2p^2/4}I_0(R_0^2p^2/4)。\end{aligned}\tag{8}$$

ここで I_0 は変形ベッセル関数である。Eq.(8) より、一体のハミルトニアンは

$$H_s=[\frac{(\mathbf{P}+e\mathbf{A})^2}{2m}-F((\mathbf{P}+\boldsymbol{\alpha})^2)\rho(\bar{x},x)]_{\bar{x}\to x}。\tag{9}$$

$\psi(x)$ を H_s の固有関数で mode 展開する。

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\sum_{l,n}u_{l,n}(x)a_{l,n},\\H_su_{l,n}(x)&=E_{l,n}u_{l,n}(x),\ \{a_{l,n}^\dagger,a_{l',n'}\}=\delta_{l,l'}\delta_{n,n'},\\E_{l,0}&<E_{l,1}<E_{l,2}<\cdots\end{aligned}\tag{10}$$

ここで l は角運動量量子数であり $a_{l,n}^\dagger$, $a_{l',n'}$ はフェルミオンの生成消滅演算子。N-電子状態は $n=0$ のエネルギーレベルの l で指定される一電子状態にν_l の割合で電子が詰まっているようなものとする。

$$|\psi\rangle=\sum_{l_1,l_2\cdots l_N=0}^{M}F_{l_1,\cdots l_N}a_{l_1,0}^\dagger a_{l_2,0}^\dagger\cdots a_{l_N,0}^\dagger|0\rangle,\tag{11}$$

$$\sum_{l_2\cdots l_N=0}^{M}F_{n,l_2,\cdots l_N}^*F_{m,l_2,\cdots l_N}=\nu_n\delta_{n,m},\quad 0\le\nu_n\le 1。\tag{12}$$

二点関数は、

$$\langle\psi|\,\psi^\dagger(y)\psi(x)\,|\psi\rangle = \sum_{l=0}^{M}\nu_l u_{l,0}^*(y)u_{l,0}(x) \tag{13}$$

となる。Eq.(5) Eq.(6) Eq.(13) より、Self-Consistency Condition

$$U_0\rho(x,y)e^{-\gamma(x-y)^2}\exp[i\int_x^y \alpha_i d\xi^i] = \sum_{l=0}^{M}\nu_l u_{l,0}^*(y)u_{l,0}(x) \tag{14}$$

を得る。電子密度一定の解 Eq.(7) は $\nu_l = \nu$ ($F_{l_1,\cdots l_N} = F_{l_1,\cdots l_N}^{(g.s.)}$) の時確かに Eq.(14) を満たしエネルギー固有値 E_l は縮退する ($E_l = E^{(g.s.)}$)。

Vortex 解の性質として回転不変性と励起エネルギーの有限性を課すと α とρ に次のような条件がつく[2]。

$$\begin{aligned}\alpha_i(x) = eA_i(x) + n_i(x), \quad \mathbf{n}(x) = \frac{n(r)}{r^2}(-x_2, x_1),\\ \mathbf{A}(x) = \frac{B}{2}(-x_2, x_1),\end{aligned} \tag{15}$$

境界条件は

$$\begin{aligned}&n(0) = n\ ;\ \text{integer},\\ &\lim_{r\to\infty} n(r) = 0,\\ &\rho(x,0) = \rho(0,x) = 0,\ \rho(x,x) = \rho(r)。\end{aligned} \tag{16}$$

Eq.(16) で n は整数である。これは $U(x,y)$ が一価であるための条件である。線積分の経路が原点を横切る時、原点を囲む無限小閉曲線 c の線積分

$$\oint_c \alpha_i d\xi^i = 2\pi n(0) \tag{17}$$

だけ不定性が生じる。よって一価であるためのには $n(0) = n$ は整数でなければならない。

運動量および角運動量密度演算子は次のように定義される。

$$P_i(x) = \frac{1}{2}\{\psi^\dagger(x)(-i\partial_i + eA_i(x))\psi(x) + [(i\partial_i + eA_i(x))\psi^\dagger(x)]\psi(x)\},$$
$$L(x) = \epsilon_{ij}x_iP_j(x)。 \tag{18}$$

Eq.(6) and Eq.(15) より期待値は、

$$\langle P_i(x)\rangle = -\frac{\nu}{\pi R_0^2}\rho(r)n_i(x),$$
$$\langle L(x)\rangle = -\frac{\nu}{\pi R_0^2}\rho(r)n(r)。 \tag{19}$$

Eq.(19) より電流密度は A_i と α_i の差と、ρ に比例する。この関係式は超伝導理論におけるロンドン方程式に相当する。

3. Numerical Solution of Vortex

この節では $\nu = 1/3$ の場合に self-consistent な Vortex 解を数値計算で近似的に求める。但し、誘電率 $\kappa = 13$, 電子の有効質量 $m_e^* = 0.07m_e$ とする。$F(p^2)$ はこのままでは数値計算を実行するのは非常に困難である。そこで我々は $F(p^2)$ を $p^2 = eB$ の周りで展開し、次のように近似する。

$$F(p^2) = F(eB) + F'(eB)(p^2 - eB) = F_0 - \frac{p^2}{2m'}。 \tag{20}$$

よって、解くべき式は次のような非線形シュレーディンガー方程式である。

$$[\frac{(\mathbf{P}+e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{(\mathbf{P}+\boldsymbol{\alpha})^2}{2m'}\rho(\bar{x},x) + F_0(1-\rho(x))]_{\bar{x}\to x}u_l(x) = E_lu_l(x),$$
$$u_l(x) = v(r)e^{-il\theta}\ ;\ l \text{ is integer}, \tag{21}$$

ここで α_i と ρ は self-consistency condition Eq.(14) から計算される。(簡単のためエネルギーに定数 F_0 を加えた。)

準粒子の状態（quasihole）として最も簡単な一様な状態で $l=0$ の一電子状態にだけ電子をつめない様なものを考える。

$$|hole\rangle = \sum_{l_1,l_2,\cdots,l_N=0}^{M} F^{(g.s.)}_{l_1,\cdots,l_N} a^\dagger_{l_1+1,0} a^\dagger_{l_2+1,0} \cdots a^\dagger_{l_N+1,0} |0\rangle。 \tag{22}$$

これ以後、長さは R_0 を単位として測ることにする。$n(r)$ としては次の様なものを考える。

$$n_+(r) = \frac{r^2}{e^{r^2}-1},\ n_+(0) = 1。 \tag{23}$$

Eq.(23) は Vortex 解の条件 Eq.(16) を満たす。この形は lowest Landau level で $l=0$ の一電子状態にだけ電子をつめない状態から計算される。すなわち、

$$\left\langle \psi^\dagger(y)\psi(x) \right\rangle_{\text{lowest Landau level},l\neq 0} = \frac{\nu}{\pi}(1-e^{-z_y z_x^*}) e^{-\frac{1}{2}|z_x - z_y|^2 + i\int_x^y eA_i d\xi^i}, \tag{24}$$

ここで $z_x = x_1 + ix_2$。$1-e^{-z_y z_x^*}$ の位相部分が $|z_x - z_y| \ll 1$ の時 Eq.(23) と一致する。また

$$\rho_0(x,y) = \sqrt{1+e^{-2r_x r_y \cos\theta} - 2\cos(r_x r_y \sin\theta) e^{-r_x r_y \cos\theta}}。 \tag{25}$$

$\rho_0(x,y)$ は次の様な性質を持つ。$\rho_0(x,y) = \bar{\rho}_0(\sqrt{r_x r_y}, \theta^2); \bar{\rho}_0(r,0) = \rho_0(r)$. これらの性質を ρ に課して数値計算により ρ を $\nu = 1/3$ の場合に self-consistent に求めた。我々は ansatz Eq.(23) が実際に Eq.(14) を満たすことを数値的に確かめた。その結果、エネルギー固有値 E_l は l の小さい値で縮退が解けた。この準粒子の電荷は一様な状態からの電荷密度のずれから計算される。

$$Q_+ = e\frac{\nu}{\pi R_0^2}\int d^2x(\rho(r)-1) = -\nu e. \tag{26}$$

今 $\nu = 1/3$ なので準粒子の電荷は $-e/3$ である。角運動量は Eq.(19) より

$$\langle L\rangle = \int d^2x \langle L(x)\rangle = -\frac{\nu}{\pi R_0^2}\int d^2x \rho(r) n(r)。 \tag{27}$$

この値は数値的に $\nu = 1/3$ で $B = 5,\ 10,\ 15,\ 20[T]$ の時それぞれ $-0.989/3$, $-0.991/3$, $-0.993/3$, $-0.994/3$ となり、$-1/3$ に近い値を得た。

準粒子と反対の電荷を持つ反準粒子（quasiparticle）も同様な計算によって得られた。反準粒子の状態としては

$$|particle\rangle = a^{\dagger}_{1,0} \sum_{l_1,l_2,\cdots,l_N=0}^{M} F^{(g.s.)}_{l_1,\cdots,l_N} a^{\dagger}_{l_1+2,0} a^{\dagger}_{l_2+2,0} \cdots a^{\dagger}_{l_N+2,0} |0\rangle \tag{28}$$

を考える。$n(r)$ は

$$n_{-}(r) = \frac{r^2(3-2r^2)}{e^{r^2}+2r^2-1},\ n_{-}(0) = 1 \tag{29}$$

を用いる。数値的に self-consistent な解を求めた結果、エネルギー固有値 E_l は l の小さい値で縮退が解けた。この反準粒子の電荷は $e/3$ で、角運動量は $B = 5,\ 10,\ 15,\ 20[T]$ の時それぞれ 0.965/3, 0.978/3, 0.983/3, 0.986/3 となり、1/3 に近い値を得た。

ギャップエネルギー Δ は、無限に離れた準粒子と反準粒子を生成するエネルギーの半分である。

$$\Delta = (E_{hole} + E_{particle})/2. \tag{30}$$

実験的には Δ は diagonal resisitivity の温度依存性$\rho_{xx} \propto e^{-\Delta/T}$ から決められる。

それぞれの Vortex のエネルギーは

$$E_{vortex} = \sum_l [\nu_l E_l - \nu E^{(g.s.)}_l] + \frac{1}{2}\int d^2x d^2y V(x-y)[|U_0(x,y)|^2 - |U^{(g.s.)}_0(x,y)|^2], \tag{31}$$

ここで $E^{(g.s.)}_l$ は一様な基底状態のエネルギー固有値であり $U^{(g.s.)}_0$ は Eq.(7) で与えられる。結果は $B = 10,\ 15,\ 20[T]$ で正の有限なギャップエネルギーを得た（$20[T]$ で $\Delta \sim 0.4[K]$)。また、$B = 5.5[T]$ でギャップは消失し $B = 5[T]$ でギャップエネルギーは負になった。

実験では我々の値より大きなギャップエネルギーが測定されている[4]。また、Laughlin の波動関数[5] に基ずく計算では、さらに大きなギャップエネルギーが得られている。しかし、大きなギャップエネルギーが測定された温度領域よりも低い温度領域における ρ_{xx} の温度依存性については完全に理解されているとはいえず、我々の小さなギャップエネルギーは低い温度領域における ρ_{xx} の温度依存性からは排除されない。[6–8] また、どの実験でも Δ は $B \sim 5[T]$ で消失し、我々の得た結果と一致する。この様なホール効果が起きる磁場の敷居値の存在を説明する理論は他にも

あるが、それらはすべて disorder の効果によって説明している[9,10]。それに対して我々の結果は disorder がなくても敷居値が存在することを示している。

4. Summary

我々は分数量子ホール状態（$\nu = 1/3$）にある二次元電子系に対し bi-local mean field を導入し、その古典解として Vortex 解を数値的に構成した。この Vortex 解の電荷はちょうど $\pm e/3$ であり、角運動量は近似的に $\pm 1/3$ である。よって Vortex 解を準粒子と考えたとき、この準粒子は分数統計に従うことが予想される[11]。

我々はまた、準粒子と反準粒子を生成するエネルギーからギャップエネルギーの磁場依存性を調べた。その結果、$B > 5.5[T]$ で正の有限なギャップが得られ、基底状態が incompressible であることが示された。$B = 5.5[T]$ 以下ではギャップは負になり、一様な mean field は不安定になった。

REFERENCES

1. K.Ishikawa,Prog.Theor.Phys, Suppl.No.107(1992)167;Vol.88(1992)881.
2. K.Ishikawa and N.Maeda,"A Mean Field Theory for the Quantum Hall Liquid II,–The Vortex Solution–",Hokkaido University preprint EPHOU-93-001.
3. A.Abrikosov,JETP(Sov.Phys.)**5**(1957)1174.
   H.Nielsen and P.Olesen,Nucl.Phys.B61(1973)45.
4. *The Quantum Hall Effect* ed. R.E.Prange and S.M.Girvin (Springer, New York, 1990) and references therein.
5. R.B.Laughlin,Phys.Rev.Lett.**50**(1983)1395.
6. G.S.Boebinger, A.M.Chang, H.L.Stormer and D.C.Tsui, Phys.Rev.Lett.**55**(1985)1606
7. J.Wakabayashi, S.Kawaji, J.Yoshino and H.Sakaki, J.Phys.Soc.Jpn.**55**(1986)1319

8. G.S.Boebinger, H.L.Stormer, D.C.Tsui, A.M.Chang, J.C.M.Hwang, A.Y.Cho, C.W.Tu and G.Weimann, Phys.Rev.Lett.**36**(1987)7919

9. A.H.MacDonald,K.L.Liu,S.M.Girvin and P.M.Platzman, Phys.Rev.B33(1986)4014

10. A.Gold,Phys.Rev.B33(1986)5959

11. F.Wilczek, Phys.Rev.Lett.**48**,(1982),1144.